

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.171

**УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ
НА ЯДРАХ***В. С. Барашенков, В. Д. Томеев*

I. ОПТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

До недавнего времени основой всех расчетов упругого рассеяния быстрых частиц на ядрах являлась полуфеноменологическая оптическая модель (см., например, работы ¹⁻³). После того как из решения волнового уравнения с подобранным из опыта потенциалом определены фазы, сечение рассеяния $\sigma(\theta)$ получается простым суммированием. Например, для рассеяния бесспиновых частиц

$$\sigma(\theta) = |A(\theta)|^2, \quad (1)$$

$$A(\theta) = \lambda i \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - e^{2i\eta_l}) P_l(\cos \theta) / 2. \quad (2)$$

При высоких энергиях, когда длина дебройлевской волны λ становится во много раз меньшей размеров ядра-мишени и в сумму по l существенный вклад дает очень большое число членов, сумму в формуле (2) удобно заменить интегралом и использовать асимптотическое соотношение

$$P_l(\cos \theta) \approx J_0((2l+1) \sin \theta / 2) \approx J_0(l\theta), \quad (3)$$

где J_0 — хорошо известная функция Бесселя.

В области высоких энергий можно использовать также и другое приближение — выразить фазы рассеяния через комплексный коэффициент преломления $K(T, r) = n(T, r) + ik(T, r)$, т. е. положить

$$\eta_l(T) = \frac{1}{2} \int_{\lambda_l}^{\infty} \frac{rK(T, r) dr}{[r^2 + (\lambda l)^2]^{1/2}}, \quad (4)$$

где

$$n(T, r) = \alpha(T) k(T, r), \quad k(T, r) = A\sigma_t(T) d(r), \quad (5)$$

σ_t — полное сечение взаимодействия рассеивающейся частицы с нуклоном ядра, α — отношение реальной и мнимой частей амплитуды упругого рассеяния этой частицы на внутриядерном нуклоне, $d(r)$ — подбираемая из сравнения с экспериментом плотность нуклонов в ядре-мишени с атомным номером A . Здесь и везде далее T — кинетическая энергия рассеивающейся частицы в лабораторной системе координат.

Так как характеристики взаимодействия частицы со связанным внутриядерным нуклоном несколько отличаются от соответствующих характеристик взаимодействия свободных частиц, в формулы (5) приходится вводить поправочные множители, подбираемые из сравнения с экспериментом и зависящие, вообще говоря, от энергии. Большое число подгоночных параметров, которые приходится вводить в формулы,

не может не вызывать чувства неудовлетворенности: оптическая модель оказывается слишком «привязанной» к эксперименту.

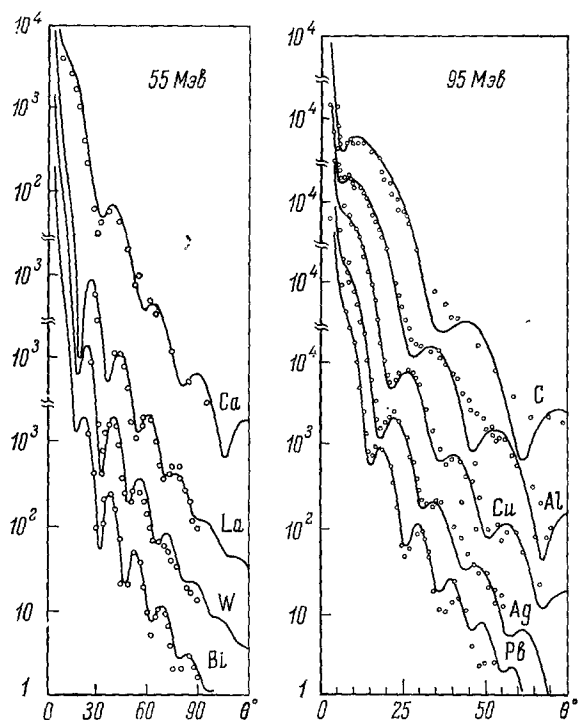


Рис. 1. Дифференциальное сечение упругого рассеяния протонов на различных ядрах (мб/стер, система центра масс).

Кружки — экспериментальные данные ⁴⁻⁶, кривые — расчет по оптической модели ⁷.

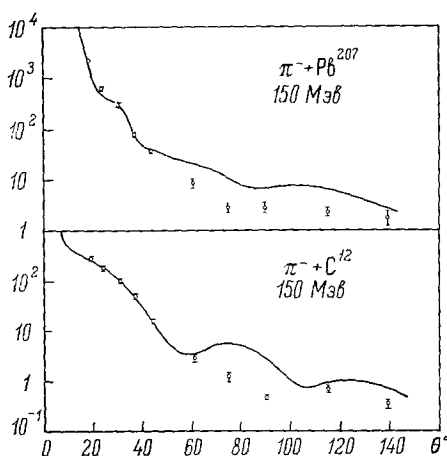


Рис. 2. Дифференциальное сечение упругого рассеяния π -мезонов (мб/стер, система центра масс) ⁸.

Кривые — результат расчета по оптической модели.

Степень согласия оптических кривых с опытом видна из рис. 1—3. Особенно трудно подгонять теоретические кривые под эксперимент в области больших углов рассеяния, где дают вклад высшие дифрак-

ционные минимумы и максимумы. Как правило, если экспериментальные данные достаточно точные, здесь удается получить лишь качественное согласие, иначе приходится использовать слишком сложные оптические потенциалы с большим числом параметров, которые весьма нерегулярно изменяются при изменении энергии рассеивающихся частиц и типа ядра-мишени.

Это особенно заметно для легких ядер: дейтона, гелия и т. д. Чтобы получить согласие с опытом, в этом случае приходится выбирать оптические потенциалы с радиальной зависимостью, которую трудно согласовать с тем, что мы знаем из опытов с рассеянием электронов. Например, для того чтобы оптическая кривая совпала с экспериментальными данными брукхейвенской лаборатории по упругому рассеянию p, He^4 при энергии $T = 1 \text{ Гэв}$, требуется потенциал с резкой границей, в то время как опыты с рассеянием электронов указывают на большую диффузную границу ядра He^4 . Учет размеров рассеивающегося протона лишь увеличивает эффективный параметр диффузности.

Использование в оптических расчетах гауссова потенциала, взятого из опытов с рассеянием электронов, не воспроизводит острый минимум в угловом распределении при $\theta \approx 24^\circ$, а при больших углах рассеяния дает сечения, на два-три порядка заниженные по сравнению с экспериментом (см. рис. 3). Физически это связано с тем очевидным фактом, что дифракционные эффекты и преломление дебройлевской волны рассеивающегося протона становятся тем более заметными, чем более неоднородной является рассеивающая и преломляющая среда.

Таким образом, мы видим, что оптическая модель не учитывает каких-то весьма важных физических деталей. Чтобы выяснить, в чем здесь дело, рассмотрим подробнее прохождение частицы через среду из отдельных рассеивающих и поглощающих центров (нуклонов).

II. ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО ДИФРАКЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ

В обычной оптической модели микроструктура среды не рассматривается и вещество представляется как некоторая непрерывная среда. Мы можем надеяться, что более точное рассмотрение позволит установить поправки, которые следует внести в такую приближенную оптическую картину и более точно установить границы ее применимости.

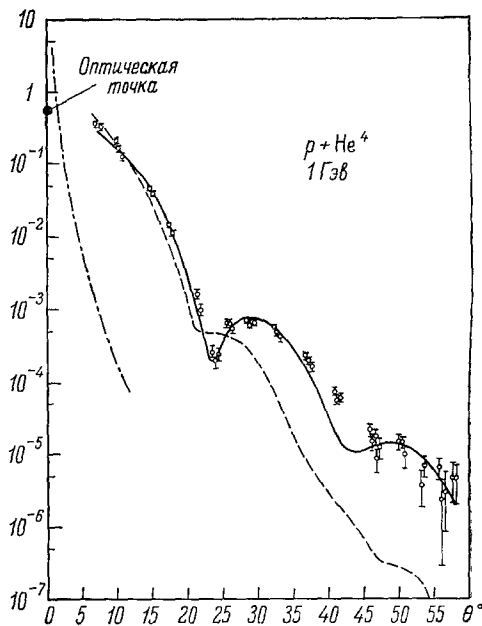


Рис. 3. Сечение упругого рассеяния протонов на гелии (барн/стер, система центра масс)⁹.

Штриховая кривая — оптический расчет с гауссовым потенциалом, полученным из опытов с рассеянием электронов на ядре He^4 . Приблизительное согласие с экспериментом в этом случае возможно получить лишь для первого дифракционного пика. Сплошная кривая — оптический расчет в случае, когда потенциал выбран в виде быстро спадающей на границе функции Вудса — Саксона с радиусом $s = 1,6 \cdot 10^{-13}$ см и параметром диффузности $a = 3,1 \cdot 10^{-14}$ см. Штрих-пунктирная кривая — сечение кулоновского рассеяния на ядре He^4 , рассчитанное по формуле Мотта с гауссовым форм-фактором, полученным из опытов с рассеянием электронов. При углах $\theta > 2-3^\circ$ это сечение становится пренебрежимо малым.

Пренебрежем пока зависимостью взаимодействий от спинов. Это вполне оправдано в области высоких энергий, где спиновые эффекты существенно сказываются лишь на деталях и не изменяют общей картины взаимодействия (см. ниже, гл. III). Рассеяние падающей частицы на отдельном нуклоне будем характеризовать амплитудой рассеяния \mathcal{A} , однако, поскольку нуклоны теперь не обязательно располагаются в начале координат ($r_i \neq 0$; рис. 4), азимутально-симметричное выражение (2) для этой амплитуды уже непригодно.

Чтобы получить правильное выражение, вспомним, что асимптотическая волновая функция после упругого рассеяния в общем случае представляет собой сумму плоской падающей волны e^{ikz} и рассеянной сферической волны с амплитудой $\mathcal{A}(\theta, \varphi)$:

$$\Psi(x) \sim e^{ikz} + \mathcal{A}(\theta, \varphi) e^{ikz}/r, \quad (6)$$

где

$$\mathcal{A}(\theta, \varphi) = \frac{\hbar i}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (2l+1) (\delta_{0m} - S_{lm}) e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \quad (7)$$

$\lambda = \hbar/k$ — длина дебройлевской волны в системе центра масс, δ_{0m} — известный символ Кронекера, P_l^m — присоединенный полином Лежандра m -го порядка. Частный случай азимутальной симметрии (2) получается в предположении

$$S_{lm} = e^{2in_l} \delta_{0m}. \quad (8)$$

Если ограничиться достаточно высокими энергиями, когда рассеяние на нуклоне происходит в основном в области малых углов θ и существенные l очень велики, можно воспользоваться асимптотическим соотношением, связывающим полином P_l^m с функцией Бесселя J_m ^{10, 11}:

$$P_l^m(\cos \theta) \approx (-1)^m [l + (1/2)]^m J_m[(2l+1) \sin(\theta/2)] \quad (9)$$

(частным случаем этого соотношения является формула (3)).

Учитывая далее интегральное представление функции Бесселя

$$J_m(x) = \frac{(-i)^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \xi + im\xi} d\xi$$

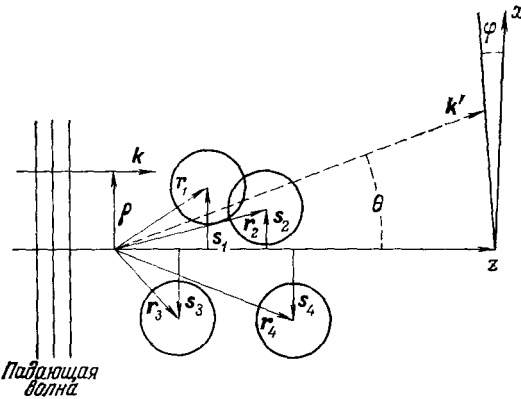


Рис. 4. Рассеяние частицы с импульсом k на системе из нескольких нуклонов.

Положение отдельных нуклонов определяется трехмерными векторами r_i ; s_i — двумерные векторы, характеризующие положение нуклонов в плоскости, перпендикулярной к импульсу k (ось z параллельна k); ρ — двумерный вектор параметра удара в этой же плоскости. k — импульс рассеянной частицы; θ — полярный угол рассеяния; азимутальный угол рассеяния φ , характеризующий вращение плоскости k, z вокруг оси z , отсчитывается от плоскости x, z .

и заменяя суммирование по l интегралом, запишем амплитуду (7) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\theta, \varphi) &= \frac{\hbar i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) e^{i(2l+1) \sin(\theta/2) \cos \xi} = \\ &= \left\{ 1 - \sum_{m=-l}^l i^{-m} \left(l + \frac{1}{2} \right)^m S_{lm} e^{im(\varphi + \xi)} \right\} = \\ &= \frac{i}{2\pi \lambda} \int_0^{2\pi} d\xi \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) e^{i(2l+1) \sin(\theta/2) \cos \xi} [1 - e^{in(\rho, \varphi)}] \rho d\rho, \end{aligned}$$

где $\rho \approx \lambda l$ — параметр удара, $\psi = \xi + \varphi$ и обозначено

$$\sum_{m=-l}^l i^{-m} \left(l + \frac{1}{2} \right) S_{lm} e^{im\psi} \equiv e^{i\eta(\rho, \psi)}.$$

Введенную таким образом функцию $\eta(\rho, \psi)$ мы будем далее называть «фазой».

Если переменной ξ придать теперь физический смысл угла между направлением вектора ρ и осью x , то в области небольших углов θ можно приближенно положить $\rho(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \approx 2k\rho \cos(\xi - \varphi + \pi) \sin(\theta/2)$, где \mathbf{k} и \mathbf{k}' — соответственно импульсы налетающей и рассеянной частиц. После этого амплитуда рассеяния запишется в компактном виде

$$\mathcal{A}(\theta, \varphi) \equiv \mathcal{A}(q) = \frac{i}{2\pi\lambda} \int e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\rho} (1 - e^{i\eta(\rho)}) d^2\rho = \frac{i}{2\pi\lambda} \int e^{i\mathbf{q}\rho} \Gamma(\rho) d^2\rho, \quad (10)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ — переданный импульс,

$$\Gamma(\rho) = 1 - e^{i\eta(\rho)} \quad (11)$$

— так называемая «профилирующая функция», и интегрирование производится по всей плоскости параметра удара ρ .

Заметим, что выражение (11) можно рассматривать как фурье-преобразование функции $\Gamma(\rho)$: если известна амплитуда $\mathcal{A}(\mathbf{q})$, эту функцию можно получить обратным преобразованием

$$\Gamma(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi i} \int e^{-i\mathbf{q}\rho} \mathcal{A}(\mathbf{q}) d^2\mathbf{q}, \quad (12)$$

где интегрирование выполняется по всей плоскости, перпендикулярной к начальному импульсу \mathbf{k} .

Выражения (10) и (11) мы и положим в основу дальнейших вычислений рассеяния быстрой частицы на ядре*). Полную амплитуду такого рассеяния мы постараемся выразить через амплитуды рассеяния на отдельных нуклонах. Впервые такой подход был рассмотрен Глаубером¹²⁻¹⁴.

Высокоэнергетическая налетающая частица может столкнуться с каким-то одним нуклоном внутри ядра-мишени или испытать последовательные столкновения с несколькими такими нуклонами. В тех случаях, когда рассеяние произошло на угол $\theta > \pi/2$, возможно также повторное рассеяние на одном из этих нуклонов. Кроме того, поскольку радиус взаимодействия налетающей частицы с нуклоном может быть больше расстояния между отдельными нуклонами в ядре, может случиться, что частица будет одновременно взаимодействовать сразу с несколькими внутриядерными нуклонами.

Математический анализ такой картины в общем случае представляет собой весьма сложную задачу, однако можно получить существенные упрощения, если воспользоваться «дифракционным приближением».

Мы будем считать, что рассеяние на любом внутриядерном нуклоне происходит так, как если бы этот нуклон представлял собой небольшой

*) В частном случае азимутальной симметрии, когда верно (8) и, следовательно, фаза $\eta(\rho, \psi)$ не зависит от ψ , в выражении (10) может быть выполнено интегрирование по угловой переменной, после чего получим хорошо известное выражение

$$\mathcal{A}(\theta) = ik \int_0^{\infty} J_0(2k\rho \sin \theta/2) (1 - e^{i\eta(\rho)}) \rho d\rho, \quad (13)$$

совпадающее с (2), если в последнем сделать асимптотическую замену (3) и учесть, что фаза $\eta(\rho)$ теперь вдвое больше фазы, использованной в выражении (2).

кусочек поглощающей и преломляющей среды (см. рис. 4). Тогда, подобно тому как это имеет место в оптике, для определения амплитуды рассеяния необходимо найти лишь сдвиг фаз. Фаза, обусловленная рассеянием на одном нуклоне,

$$\chi(\rho) = \int K(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (14)$$

где $K(\mathbf{r})$ — локальный показатель преломления, а интегрирование производится вдоль траектории частицы. Основным моментом теории Глаубера является предположение, что траектория частицы незначительно отличается от прямолинейной и, следовательно, интегрирование в формуле (14) по криволинейному пути можно заменить интегрированием вдоль первоначального движения частицы z . Таким образом, фазовый сдвиг от рассеяния на каком-то одном нуклоне оказывается не зависящим от присутствия других нуклонов. При движении частицы внутри ядра с A нуклонами суммарный коэффициент преломления

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = \sum_{i=1}^A K_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

и соответственно полный сдвиг фаз будет равен сумме сдвигов фаз, обусловленных рассеянием на отдельных нуклонах:

$$\chi(\rho, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) = \sum_{i=1}^A \chi_i(\rho - \mathbf{s}_i). \quad (15)$$

При этом совершенно не требуется знания деталей индивидуальных взаимодействий налетающей частицы с нуклонами ядра: сдвиг фазы $\chi_i(\rho - \mathbf{s}_i)$ определяется фурье-компонентой (12) амплитуды рассеяния падающей частицы на соответствующем нуклоне. Все парциальные амплитуды рассеяния на отдельных нуклонах при этом следует, конечно, преобразовать в какую-то одну общую систему координат, например, в лабораторную. В соответствии с выражением (10) полное изменение амплитуды падающей волны

$$\delta \mathcal{A}_{\text{пад}} = \frac{i}{2\pi\hbar} \int e^{iq\rho} \Phi_{\text{н}}^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \Gamma(\rho, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) \Phi_{\text{н}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \times \\ \times \prod_{i=1}^A d^3r_i d^2\rho, \quad (16)$$

где

$$\Gamma(\rho, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) = 1 - \prod_{i=1}^A \{1 - \Gamma_i(\rho - \mathbf{s}_i)\} = \\ = \sum_{i=1}^A \Gamma_i(\rho - \mathbf{s}_i) + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^A \Gamma_i(\rho - \mathbf{s}_i) \Gamma_j(\rho - \mathbf{s}_j) + \\ + \sum_{\substack{i, j, k=1 \\ i \neq j \neq k}}^A \Gamma_i(\rho - \mathbf{s}_i) \Gamma_j(\rho - \mathbf{s}_j) \Gamma_k(\rho - \mathbf{s}_k) + \dots \quad (17)$$

— профилирующая функция ядра, $\Phi_{\text{н}}$ и $\Phi_{\text{н}}^*$ — волновые функции, описывающие основное состояние и движение ядра до и после рассеяния. Физический смысл введения волновых функций ядра в амплитуду (16) заключается в том, что произведение $\Phi_{\text{н}}^* \Phi_{\text{н}}$ определяет распределение рассеивающих центров внутри мишени.

Мы видим, что рассеянная на ядре волна представляет собой сумму членов, соответствующих рассеяниям на одиночных внутриядерных нуклонах, рассеяниям на двух нуклонах, последовательных или одновременных — в нашем приближении они не различаются, рассеяниям на трех нуклонах и т. д.

Одним из основных условий законности такого разложения является требование, чтобы распространяющаяся внутри ядра волна слабо искажалась дифракционными эффектами; только в этом случае можно к каждому взаимодействию волны внутри ядра применять формулы (10), (11) и говорить о суммировании фаз. Напомним, что формулы (10), (11) относятся к рассеянию плоской волны и, кроме того, при выводе соотношения (15) было предположено, что траектория рассеивающейся частицы остается почти прямолинейной.

При рассеянии на нуклоне с размерами r_N дифракционные эффекты начинают существенно сказываться лишь на расстояниях

$$d \gtrsim r_N^2/\lambda_L$$

(λ_L — длина дебройлевской волны в лабораторной системе координат), поэтому условием применимости разложения (17) является требование, чтобы «область тени» d значительно превосходила размеры ядра R :

$$r_N^2/\lambda_L \gg R.$$

Так как $R/r_N \sim A^{1/3}$, это эквивалентно требованию

$$\lambda_L \ll r_N A^{1/3} \approx A^{1/3} 10^{-13} \text{ см}, \quad (18)$$

что выполняется уже при энергиях в несколько сотен *Мэв*.

Допущение о том, что суммарный коэффициент преломления $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)$ представляет собой простую сумму коэффициентов преломления для рассеяния на отдельных нуклонах ядра, предполагает, что в промежутке между двумя актами рассеяния внутри ядра частица движется совершенно свободно. Это, конечно, также является всего лишь аппроксимацией реального процесса, которая, по-видимому, хорошо применима для ядра дейтерия, однако может привести к дополнительным погрешностям в случае более тяжелых ядер. Если говорить на языке теории поля, то при этом в полном пропагаторе, описывающем движение частицы между двумя взаимодействиями, сохраняется лишь δ -функция и отбрасывается вся остальная часть.

Другим ограничением теории является необходимость рассматривать лишь область не слишком больших углов рассеяния, поскольку соотношения (10) — (12) выведены именно в таком приближении. Вследствие этого повторные рассеяния на одном и том же нуклоне исключаются и в суммах формулы (17) нет одинаковых сомножителей.

Таким образом, мы видим, что рассмотренная нами картина во многом остается еще весьма приближенной. Здесь широкое поле деятельности для различных уточнений и обобщений. Тем не менее, как будет показано ниже, уже на этом этапе удастся понять многие новые детали ядерных взаимодействий и сделать важный шаг вперед по сравнению с обычной оптической моделью.

Преобразуем теперь выражение (16) к виду, более удобному для численных расчетов. Для этого прежде всего учтем, что ядерные волновые функции

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = e^{i\mathbf{P}'R}\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A), \quad \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = e^{i\mathbf{P}R}\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A),$$

где \mathbf{P} и \mathbf{P}' — импульсы ядра-мишени до и после рассеяния,

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^A \mathbf{r}_i / A$$

— вектор, определяющий положение центра масс этого ядра, φ — волновая функция, описывающая внутреннее состояние ядра. Введем, далее, относительные координаты нуклонов в системе центра масс $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathcal{R}$ и обозначим $\mathbf{s}'_i = \mathbf{s}_i - \mathbf{s}$, $\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} - \mathbf{s}$, где \mathbf{s} — проекция вектора \mathcal{R} на плоскость, перпендикулярную к импульсу первичной частицы \mathbf{k} . Формула (16) запишется тогда в виде

$$\delta \mathcal{A}_{\text{пад}} = \frac{i}{2\pi\hbar} \int e^{i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}} d^2\rho \int e^{i(\mathbf{P}-\mathbf{P}')\mathcal{R}} \varphi^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \Gamma(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) \times \\ \times \varphi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \delta\left(R - A^{-1} \sum_{i=1}^A r_i\right) d^3\mathcal{R} \prod_{i=1}^A d^3r_i = A(\mathbf{q}) \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{s} + i(\mathbf{P}-\mathbf{P}')R} d^3\mathcal{R},$$

где

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \frac{i}{2\pi\hbar} \int e^{i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}'} d^2\rho' \int \varphi^*(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_A) \Gamma(\boldsymbol{\rho}', \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) \times \\ \times \varphi(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_A) \delta\left(A^{-1} \sum_{k=1}^A r'_k\right) \prod_{k=1}^A d^3r'_k$$

(функция Γ , как это видно из формулы (17), зависит только от разностей $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{s}_i = \boldsymbol{\rho}' - \mathbf{s}'_i$).

Выполнив в этом выражении интегрирование по координатам центра масс, получим

$$\delta \mathcal{A}_{\text{пад}} = (2\pi)^3 \delta_{\perp}(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta[\mathbf{k}(\mathbf{P} - \mathbf{P}')/k] \mathcal{A}(\mathbf{q}); \quad (19)$$

здесь δ -функции выражают закон сохранения импульса, а функция $\mathcal{A}(\mathbf{q})$ представляет собой амплитуду рассеяния частицы на ядре в общепринятой нормировке.

С помощью соотношений (12) и (17) профилирующую функцию Γ мы можем выразить через амплитуды упругого рассеяния частицы на внутриядерных нуклонах с относительными импульсами в системе центра масс $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_A$:

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \frac{i}{2\pi\hbar} \int e^{i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}} d^2\rho \int \varphi^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \left\{ 1 - \prod_{k=1}^A \left[1 - \frac{\hbar}{2\pi i} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int e^{-i\mathbf{q}_k(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{s}_k)} \mathcal{A}_k(\mathbf{q}_k) d^2q_k \right] \right\} \varphi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \delta\left(\sum_{k=1}^A \mathbf{r}_k / A\right) \prod_{k=1}^A d^3r_k. \quad (20)$$

В этом выражении мы опустили штрихи у пространственных векторов, так как далее всегда будет подразумеваться, что все пространственные координаты в формулах для ядерных амплитуд рассеяния относятся к системе центра масс ядра.

В соответствии с нашим выводом все нуклонные амплитуды в выражении (20) относятся у нас к лабораторной системе координат. На практике это не совсем удобно, так как в большинстве экспериментальных и теоретических работ амплитуды рассеяния на нуклоне принято задавать в системе центра масс налетающей частицы и нуклона. В применении к нашему случаю это означает, что для каждой амплитуды \mathcal{A}_i должна

выбираться своя система центра масс, так как импульсы всех внутриядерных нуклонов, вообще говоря, различны. Нетрудно, однако, показать, что для области не слишком больших углов рассеяния, когда эффекты отдачи несущественны, амплитуда рассеяния в лабораторной системе координат и амплитуда рассеяния в системе центра масс налетающей частицы + нуклона различаются лишь тем, что передаваемый импульс \mathbf{q}_i следует выбирать соответственно в лабораторной системе или в системе центра масс¹³:

$$A_i^{(L)}(\mathbf{q}_i^{(L)}) = A_i^{(C)}(\mathbf{q}_i^{(C)}). \quad (21)$$

При всех преобразованиях, однако, должно сохраняться выполняющееся в системе центра масс соотношение между квадратом трехмерного передаваемого импульса \mathbf{q}^2 и соответствующей величиной четырехмерного передаваемого импульса t : $\mathbf{q}^2 = -t$; поэтому во всех окончательных формулах величина \mathbf{q}^2 должна интерпретироваться как $|t|$.

Нуклонную амплитуду в системе центра масс удобно, далее, представить в виде

$$\mathcal{A}_i(\mathbf{q}) = ZA^{-1}\mathcal{A}_{pi}(\mathbf{q}) + (1 - ZA^{-1})\mathcal{A}_{ni}(\mathbf{q}), \quad (22)$$

где

$$\mathcal{A}_{ni}(q) = \{\text{Re } \mathcal{A}_{ni}(0) + i \text{Im } \mathcal{A}_{ni}(0)\} e^{-\beta_N q^2/4} = (\sigma_{Ni}/4\pi\lambda)(i + \alpha_N) e^{-\beta_N q^2/4}; \quad (23)$$

здесь i — мнимая единица, α_N — не зависящее от выбора системы координат отношение реальной и мнимой частей амплитуды для рассеяния на угол $\theta = 0$, β_N — известная из опыта постоянная. Это выражение является вполне хорошим приближением во всей рассматриваемой нами области не слишком больших углов рассеяния.

Подход к расчету ядерных сечений, в основе которого лежат формулы (20) — (30), принято называть сейчас теорией многократного дифракционного рассеяния или, проще, — теорией Глаубера.

Мы рассмотрели лишь один из возможных, по нашему мнению, самый простой вывод соотношений этой теории, позволяющий наиболее наглядно уяснить себе соотношение теории Глаубера с обычной оптической моделью. В литературе подробно изложены и другие способы вывода формул Глаубера: диаграммный метод^{29, 30}, способ, основанный на использовании теории многократного рассеяния Ватсона³³⁻³⁵, и некоторые другие (см., например, работу³⁶). В этих подходах основные соотношения теории Глаубера рассматриваются с несколько иных точек зрения, что позволяет более четко уяснить, какие положения являются наиболее существенными для рассматриваемой картины и в каких направлениях эта картина может быть обобщена. Рассмотрение и сопоставление различных подходов к теории Глаубера представляет собой предмет самостоятельного большого обзора. Целью нашего обзора является изложение лишь основных идей теории Глаубера и выяснение, насколько хорошо эта теория согласуется с экспериментом. С более глубокими деталями интересующийся читатель может познакомиться по указанной выше литературе.

III. НУКЛОН-ДЕЙТОННОЕ РАССЕЯНИЕ

Для того чтобы по формулам (20) — (23) вычислить ядерное сечение, необходимо предварительно с помощью какой-то модели определить плотность распределения нуклонов в ядре

$$\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = \Phi^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A). \quad (24)$$

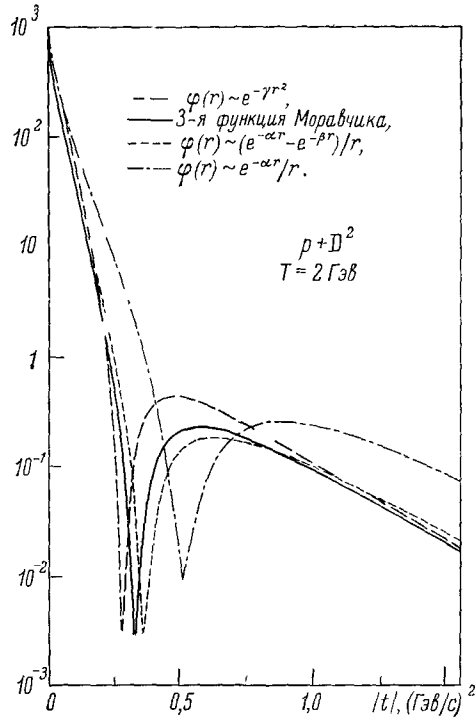


Рис. 5. Изменение сечения упругого рассеяния протона на ядре дейтрона в зависимости от различного выбора волновой функции дейтрона $\varphi(r)$ (мбарн/стер; лабораторная система координат)²⁰.

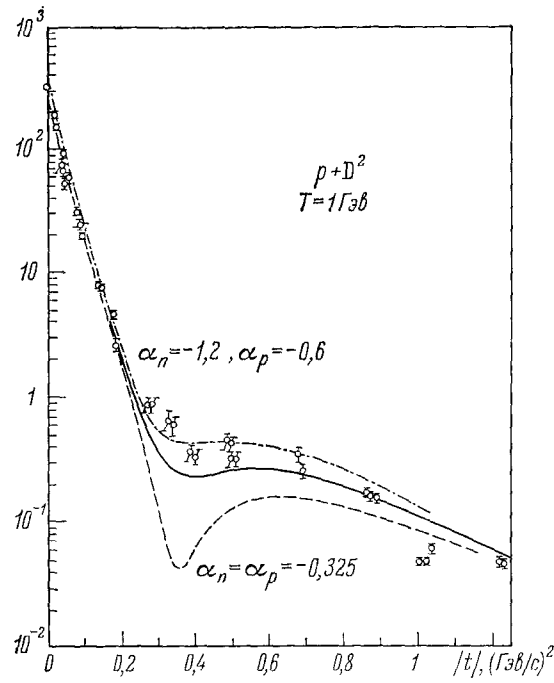


Рис. 6. Сечение упругого рассеяния протона на дейтоне при различных значениях параметра α (мбарн/стер; лабораторная система координат).

Энергия протонов 1 ГэВ^{20, 21, 22}. Сплошная кривая — сечение, вычисленное для экспериментальных значений α_p и α_n с учетом вклада S - и D -волн в φ -функцию дейтрона.

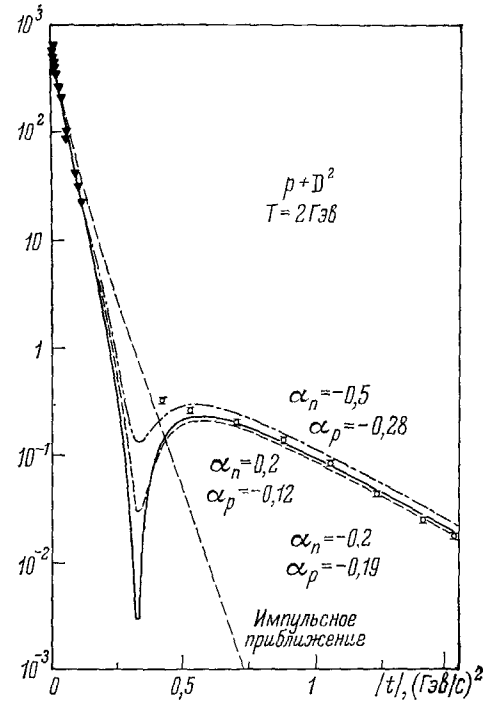


Рис. 7. То же, что и на рис. 6.

Энергия протонов 2 ГэВ²⁰. Отдельно показано сечение, вычисленное в импульсном приближении (в произведении $\prod_{k=1}^A [\dots]$ в формуле (20) удержан лишь член с $k=1$). Вклад D -волны в φ -функцию дейтрона не учитывался.

Это сравнительно легко сделать в случае ядра дейтерия, для которого существует достаточно разработанная теория. Рассчитанные по теории Глаубера сечения оказываются в этом случае весьма чувствительными как к выбору дейтонной волновой функции, так и к величине реальной части нуклонной амплитуды $\text{Re } \mathcal{A}_N \propto \alpha_N$ (рис. 5—7). Это обстоятельство можно использовать для экспериментального определения всех этих величин. В частности, в последнее время большое число экспериментов с дейтерием было посвящено измерению величины α_N — параметра, играющего очень важную роль в физике элементарных частиц¹⁵; теория Глаубера дает достаточно надежную основу для анализа этих экспериментов.

В применении к дейтерию теория Глаубера заслуживает особого внимания еще и с другой точки зрения. Как известно, основным источником наших сведений о величине сечений взаимодействий элементарных частиц с нейтроном являются разностные опыты с водородом и дейтерием. При этом очень важно уметь достаточно точно вычислять поправку, связанную с эффектами экранировки нуклонов в ядре дейтерия¹⁶. Неточность вычисления этой поправки часто значительно превосходит величину непосредственных ошибок измерения сечений. Теория Глаубера позволяет достаточно корректно учесть эффекты экранировки¹³.

Из данных по рассеянию протонов на дейтонах, приведенных на рис. 6 и 7, видно, что теория многократного дифракционного рассеяния неплохо согласуется с известными экспериментальными данными в области первого и второго максимумов, но для $|t| \approx 0,35$ ($\text{Гэв}/c$)² теория предсказывает острый минимум, тогда как на опыте наблюдается лишь изменение наклона кривой.

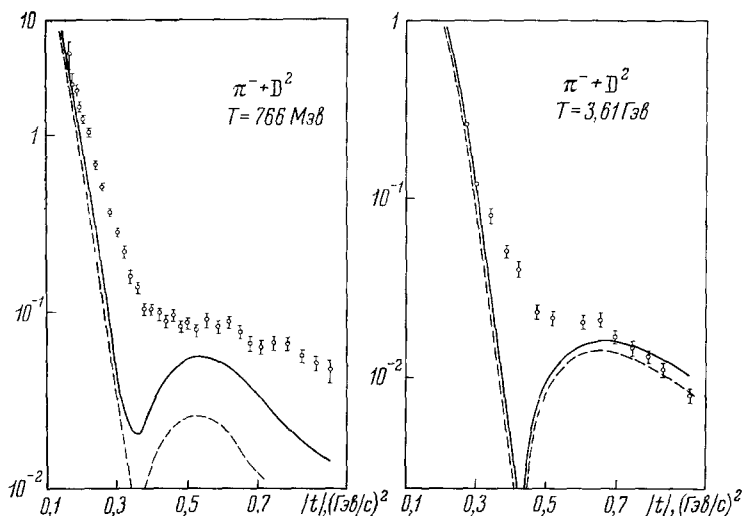


Рис. 8. Сечение рассеяния π^- -мезонов на ядре дейтерия
(мбарн/ $(\text{Гэв}/c)^2$)^{27, 28, 31}.

Штриховая кривая — сечение без учета переворота спинов; сплошная кривая — суммарное сечение, учитывающее и спиновые эффекты. Вклад D -волны в Φ -функцию дейтона не учтен. Расчеты выполнены с использованием «ковариантного обобщения теории Глаубера»^{29, 30}.

Еще хуже обстоит дело с рассеянием π -мезонов (рис. 8). В этом случае экспериментальные данные также не обнаруживают глубокого дифракционного минимума при $|t| \approx 0,35$ ($\text{Гэв}/c$)² и к тому же заметно превышают теоретические значения.

Расхождения расчетов с опытом сохраняются, если пытаться использовать для дейтона различные виды сферически-симметричных волновых функций (см. рис. 5) или, более точно, расписать амплитуды упругого πN - и NN -рассеяния, учтя член с q^4 в показателе экспоненты формулы (23), или, наконец, варьировать сечения σ_p и σ_n , оставляя неизменным значения дейтоновых сечений σ_{pd} и σ_{nd} . Не привела к успеху и попытка учесть зависимость взаимодействий от спинов: глубина дифракционного минимума при $|t| \approx 0,35$ ($\text{Гэв}/c$)² при этом уменьшается, однако согласия с экспериментальными точками получить не удается^{19, 37, 38, 40}.

Из рис. 6 и 7 видно, что глубина минимума оказывается весьма чувствительной функцией α_p и α_n . Расчеты показали, что согласие с опытами по протон-дейтоному рассеянию можно получить, если предположить такую зависимость $\alpha_p(t)$ и $\alpha_n(t)$, что при $t=0$ величины α_p и α_n совпадают со значениями, определяемыми из опытов по упругому pp -рассеянию и из дисперсионных соотношений, а при $|t| \approx 0,35$ ($\text{Гэв}/c$)² принимают значительно большие (по модулю) значения $\alpha_p = -0,6$ и $\alpha_n = -1,2$. Однако при этом расстраивается согласие экспериментальных и теоретических данных в случае рассеяния протонов на гелии (см. следующую главу).

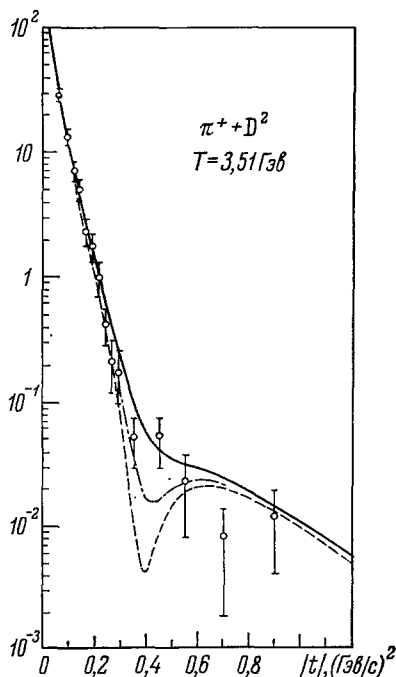


Рис. 9. Сечение упругого π^+D -рассеяния при $T=3,51$ Гэв ($\text{мбарн}/(\text{Гэв}/c)^2$)^{37, 38}. Сплошная и штрих-пунктирная кривые — расчет по теории Глаубера с учетом S - и D -волн в F -функции дейтона, когда вклад D -волны предполагался равным соответственно 7 и 3,5%. Штриховая кривая — расчет без учета D -волны.

Некоторый успех в улучшении согласия расчетов с опытом был достигнут путем учета внутриядерного движения нуклонов, которое оказывается особо важным в случае пион-дейтонового рассеяния благодаря наличию близко расположенных резонансов в сечении πN -рассеяния³². Однако, по-видимому, наиболее простое и убедительное объяснение расхождения теоретических и экспериментальных данных было недавно найдено Майклом и Уилкином³⁷. Эти авторы обратили внимание на то, что даже малая примесь D -состояния в волновой функции дейтона приводит к возможности весьма интенсивных переходов между S - и D -состояниями как раз в районе передаваемых импульсов $|t| \sim 0,35$ ($\text{Гэв}/c$)², благодаря чему дифракционный минимум в теоретической кривой сглаживается.

Аналогичное явление уже давно было установлено в случае рассеяния электронов на дейтонах; если не учитывать D -состояния дейтона, то в импульсной зависимости форм-фактора $F(t)$ в этом случае также образуется резкий минимум.

Так как спиновая зависимость оказалась недостаточной для устранения минимума в теоретической кривой, ею для простоты можно пренебречь. В этом случае амплитуда упругого рассеяния высокоэнергетической частицы на ядре дейтерия с переходом ядра из состояния с проекцией

спина s в состоянии с проекцией спина s' , $\mathcal{A}_{ss'}$, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11} = & [\mathcal{A}_p(\mathbf{q}) + \mathcal{A}_n(\mathbf{q})\{F_1(\mathbf{q}/2) - [F_2(\mathbf{q}/2)/\sqrt{2}]\}] + \\ & + \frac{i}{2\pi\lambda} \int \mathcal{A}_p[(\mathbf{q}/2) + \mathbf{q}'] \mathcal{A}_n[(\mathbf{q}/2) - \mathbf{q}'] \{F_1(\mathbf{q}'/2) - \\ & - [F_2(\mathbf{q}'/2) P_2(\cos \theta)/\sqrt{2}]\} \mathbf{q}' d\mathbf{q}' d\theta, \\ \mathcal{A}_{10} = & [\mathcal{A}_p(\mathbf{q}) + \mathcal{A}_n(\mathbf{q})\{F_1(\mathbf{q}/2) + \sqrt{2} F_2(\mathbf{q}/2)\}] + \\ & + \frac{i}{2\pi\lambda} \int \mathcal{A}_p[(\mathbf{q}/2) + \mathbf{q}'] \mathcal{A}_n[(\mathbf{q}/2) - \mathbf{q}'] \{F_1(\mathbf{q}') + \sqrt{2} F_2(\mathbf{q}') P_2(\cos \theta)\} \mathbf{q}' d\mathbf{q}' d\theta, \\ \mathcal{A}_{1,-1} = & - \frac{i}{2\pi\lambda} \int \mathcal{A}_p[(\mathbf{q}/2) + \mathbf{q}'] \mathcal{A}_n[(\mathbf{q}/2) - \mathbf{q}'] \{(3/2\sqrt{2}) F_2(\mathbf{q}') \sin^2 \theta\} \mathbf{q}' d\mathbf{q}' d\theta, \\ & \mathcal{A}_{00} = 0; \end{aligned}$$

здесь

$$F_1(\mathbf{q}) = \int_0^\infty (u^2 + w^2) J_0(\mathbf{q}\mathbf{r}) dr, \quad F_2(\mathbf{q}) = \int_0^\infty w \left(2u - \frac{1}{\sqrt{2}} w\right) J_2(\mathbf{q}\mathbf{r}) dr$$

— сферический и квадрупольный формфакторы дейтона, $u(\mathbf{r})$ и $w(\mathbf{r})$ — волновые функции S - и D -состояний дейтона, определенные, например, в работе ⁴¹, J_0 и J_2 — известные функции Бесселя. Подробности вывода всех соотношений можно найти в работах ¹³, ³⁷, ⁴⁰.

Результаты расчетов приведены на рис. 6 и 9; улучшение согласия эксперимента и теории особенно значительно в случае пион-дейтонного рассеяния. Глубина минимума в теоретической кривой оказывается практически пропорциональной вероятности D -состояний. Это открывает интересные возможности для экспериментального изучения вклада D -состояния в ядре дейтерия.

IV. РАССЕЯНИЕ НУКЛОНОВ НА ЯДРЕ ГЕЛИЯ

Для более сложных ядер мы сейчас не располагаем хорошей теорией, поэтому здесь приходится использовать различные, часто весьма грубые, модельные представления.

Если приближенно допустить, что нуклоны в ядре можно рассматривать независимо друг от друга, а далее мы увидим, что в ряде случаев это не такое уж плохое приближение, то плотность ρ факторизуется:

$$\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = \prod_{k=1}^A \rho(\mathbf{r}_k). \quad (25)$$

При этом амплитуда (20) также имела бы вид произведения не связанных друг с другом интегралов по нуклонным координатам \mathbf{r}_i , если бы не содержащаяся в ней δ -функция. Эту функцию можно устранить с помощью трансформации Гартенхауза — Шварца ¹⁷. К сожалению, получающееся при этом выражение имеет, вообще говоря, сложный вид и чаще более предпочтительным оказывается работать непосредственно с выражением, содержащим δ -функцию. Однако, если предположить, что на нуклоны внутри ядра действует гармонический потенциал, то преобразованное выражение оказывается весьма простым. В частности, если все A нуклонов ядра с радиусом R находятся в $1S$ -состоянии, то

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv \varphi^*(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) = (\pi R^2)^{-3/2} e^{-r^2/R^2} \quad (26)$$

и амплитуда рассеяния на ядре равна

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2/4A} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} d^2\rho \left\{ 1 - \prod_{h=1}^A \left[1 - \frac{\lambda}{2\pi i} \int d^2\delta e^{-i\boldsymbol{\rho}\delta - (R\delta/2)^2} \mathcal{A}_{Nh}(\delta) \right] \right\} =$$

$$= \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2/4A} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} d^2\rho \left\{ 1 - \prod_{h=1}^A \left[1 - \frac{\sigma_t (1-i\alpha)}{2\pi (R^2 + \beta^2)} e^{-\rho^2/(R^2 + \beta^2)} \right] \right\}, \quad (27)$$

где σ_t , α , β — величины, усредненные по числу протонов и нейтронов (см. выражение (22)).

Так как выражение в квадратных скобках не зависит от k , мы можем переписать произведение в виде суммы

$$\prod_{h=1}^A [1 - \chi] = [1 - \chi]^A = \sum_{k=0}^A \frac{(-1)^k A!}{k! (A-k)!} \chi^k,$$

после чего все интегралы в формуле (27) берутся аналитически и амплитуда рассеяния приобретает вид¹⁸

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \frac{i}{2\lambda} (R^2 + \beta^2) e^{q^2 R^2/4A} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^A \frac{(-1)^{k+1} A!}{k \cdot k! (A-k)!} \times$$

$$\times \left[\frac{\sigma_t (1-i\alpha)}{2\pi (R^2 + \beta^2/R^2)} \right]^k e^{-q^2 (R^2 + \beta^2)/4k}. \quad (28)$$

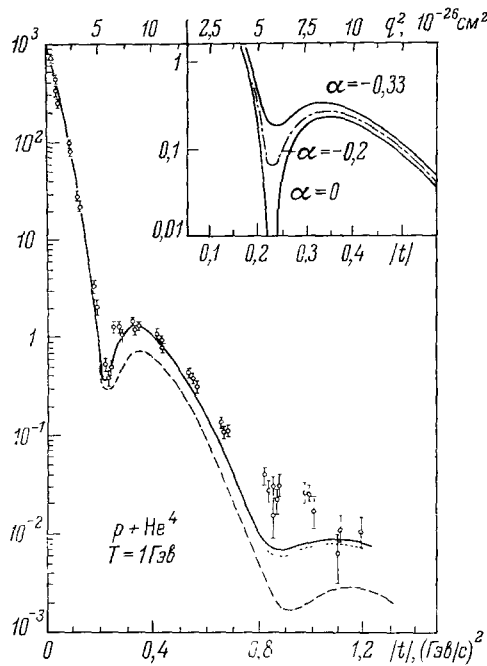


Рис. 10. Сечение упругого рассеяния протонов на ядре гелия (*мб/стера*; система центра масс)^{9, 19}.

Сплошная кривая — результаты расчета для плотности (29), учитывающей отталкивание в центре ядра. Штриховая кривая — расчет по более простой формуле (26). Пунктирная кривая — результаты расчета для плотности (30), учитывающей отталкивание в центре ядра и корреляцию нуклонов. Отдельно показано влияние изменения величины параметра α на глубину первого дифракционного минимума (при этом для простоты предполагалось $\alpha = \alpha_n = \alpha_p$; эта часть расчетов выполнена с плотностью (26)¹⁸).

N -й член в выражении (28) соответствует рассеянию с N -кратным столкновением внутри ядра (см. формулу (17)). Из опытов с рассеянием электронов известно, что функции (25) и (26) являются хорошим приближением для ядра He^4 . В этом случае все четыре нуклона ($A = 4$) действительно находятся в $1S$ -состоянии, образуя замкнутую оболочку.

На рис. 10 результаты расчетов по формуле (28) сравниваются с экспериментальными данными. Хорошее согласие имеет место лишь в области основного дифракционного пика, при больших значениях \mathbf{q} теоретическая кривая проходит заметно ниже экспериментальных точек. Подбором параметров расхождение устранить не удастся, хотя глубина первого минимума весьма чувствительна к величине α .

Попытаемся улучшить согласие расчетов с опытом, выбрав более сложное выражение для плотности ρ . Можно думать, что подобно тому

как четыре притягивающихся друг к другу шара в своем устойчивом состоянии располагаются так, что в центре их расположения образуется дырка, так и нуклоны в ядре He^4 располагаются таким образом, что в центре ядра плотность ρ минимальна. Феноменологически это можно рассматривать как результат совместного действия рассматривавшегося выше гармонического потенциала и некоторого отталкивающего потенциала в центре ядра. Соответствующее выражение для плотности нуклонов выберем в виде

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \prod_{k=1}^4 e^{-r_k^2/R^2} (1 - Ce^{-\gamma r_k^2/R^2}), \quad (29)$$

где постоянные C и γ подбираются из условия, чтобы теоретическое сечение наилучшим образом согласовалось с экспериментальным (см. таблицу); выражение для амплитуды $\mathcal{A}(\mathbf{q})$ в этом случае, как нетрудно сообразить, получается простым видоизменением формулы (28)).

Значения параметров, определяющих плотность $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$, полученные из условия наилучшего согласия экспериментальных и теоретических сечений $\sigma(\theta)$ 19

Выражение для плотности	R , 10 ⁻¹³ см	γ	S , 10 ⁻¹³ см	C	D
(26)	1,37	—	—	—	—
(29)	1,32	0,555	—	0,858	—
(30)	1,25	0,436	0,41	1	1

Из рис. 10 видно, что при $T = 1$ Гэв таким путем удается получить достаточно хорошее согласие с экспериментальными точками. Заметные различия наблюдаются лишь в области второго минимума. Чем это обусловлено, сейчас пока не ясно. Может быть, это происходит из-за того, что теория Глаубера неприменима в области больших значений \mathbf{q} или же это связано с неучтенными в теории спиновыми эффектами.

Некоторые авторы пытались объяснить расхождение при больших \mathbf{q} внутриядерными корреляциями нуклонов. Плотность ρ в этом случае может быть записана в виде

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \prod_{k=1}^4 e^{-r_k^2/R^2} (1 - Ce^{-\gamma r_k^2/R^2}) \prod_{n < m}^4 (1 - De^{-\gamma' r_{nm}^2/S^2}), \quad (30)$$

где r_{nm} — расстояние между двумя нуклонами, а значения параметров снова подбираются из условия согласия теоретического сечения с экспериментом.

Выражение для амплитуды $\mathcal{A}(\mathbf{q})$ теперь становится значительно более сложным. В частности, преобразование Гартенхауза — Шварца¹⁷ теперь мало полезно и проще иметь дело с выражением, содержащим δ -функцию $\delta(\sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i/A)$.

Подставив плотность (30) в амплитуду (20) и вычислив интегралы по всем переменным, кроме координат четырех внутриядерных нуклонов, получим

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \delta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4) d^3(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4), \quad (31)$$

где функции G_1 , G_2 , G_3 и G_4 относятся соответственно к однократным, двух-, трех- и четырехкратным столкновениям внутри ядра. Эти функции имеют вид¹⁹

$$G_1 = (i/2\pi\lambda) (f_p + f_n) e^{iqs_1} e^{-\beta^2 q^2/4}, \quad (32a)$$

$$G_2 = -(3i/8\pi^2\beta^2\lambda) f_p f_n e^{iq(s_1+s_2)/2} e^{-\beta^2 q^2/8} e^{-(s_1-s_2)^2/2\beta^2}, \quad (32b)$$

$$G_3 = (i/48\pi^3\beta^4\lambda) f_p f_n (4f_p f_n - f_p^2 - f_n^2) e^{iq(s_1+s_2+s_3)/3} e^{-\beta^2 q^2/12} e^{-[(s_1^2+s_2^2+s_3^2)-(s_1+s_2+s_3)^2/3] \beta^2}, \quad (32в)$$

$$G_4 = -(i/128\pi^4\beta^6\lambda) [f_p^2 f_n^2 - f_p f_n (f_p - f_n)^2] e^{-\beta^2 q^2/16} e^{-[(s_1+s_2+s_3)^2+(s_1^2+s_2^2+s_3^2)] \beta^2}, \quad (32г)$$

здесь обозначено $\sigma_{pt}(1-i\alpha_p) = f_p$, $\sigma_{nt}(1-i\alpha_n) = f_n$ и положено

$$\beta^2 = (\beta_p^2 + \beta_n^2)/2.$$

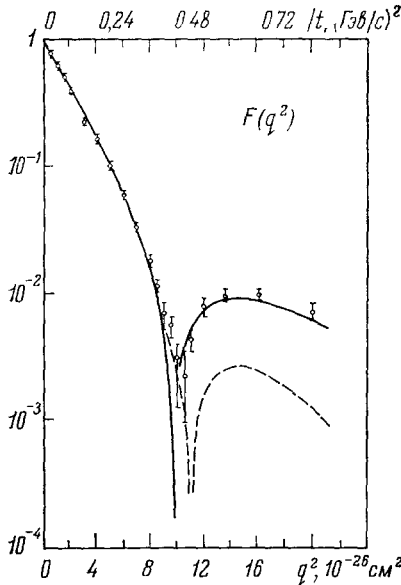


Рис. 11. Сравнение «электронного» формфактора ядра He^4 $F(q^2) = [\sigma(\theta)_{\text{эксп}}/\sigma(\theta)_{\text{мтт}}]^{1/2}$, определенного из опытов с рассеянием электронов (экспериментальные точки взяты из работы²⁰), с «протонным» формфактором, определенным из опытов с рассеянием протонов.

Сплошная кривая — значения «протонного» формфактора, вычисленные для плотности (30) и значений параметров из таблицы. Внутренняя структура рассеивающегося протона учтена с помощью формул (33) — (36). Штриховые кривые — соответствующие значения «протонного» формфактора, вычисленные в предположении, что распределение нуклонов в ядре гелия определяется формулой (30) с параметром $C = 1$ (т. е. без учета спада плотности в центре ядра). Как видно, в этом случае «электронный» и «протонный» формфакторы весьма заметно различаются¹⁹.

заклучений необходимо прежде всего сравнить полученные значения параметров с экспериментальными данными при нескольких энергиях T . Таких данных в настоящее время, к сожалению, еще не имеется. Допол-

Интегрирование δ -функции в (31) исключает координату r_4 (это уже учтено в выражении для G_4), после чего оставшееся подынтегральное выражение приобретает вид суммы членов, пропорциональных экспонентам $\exp(-\sum_{n,m}^3 a_{nm} r_n r_m)$. Такой интеграл может быть вычислен аналитически (см. ¹⁹) или численно. Мы привели формулы (31) и (32), чтобы показать, каким образом следует выполнять расчеты, когда плотность ρ имеет вид более сложный, чем (26).

Результат численных расчетов с плотностью (30) указан на рис. 10. Учет внутриядерных корреляций лишь не намного сдвигает теоретическую кривую и в пределах неточностей экспериментальных данных совершенно несуществен. Однако если учесть только корреляции и не принять во внимание спад плотности в центре ядра (т. е. положить в формуле (30) $C = 1$), теоретическая кривая оказывается значительно ниже экспериментальных точек (подробнее см. ¹⁹).

Следует иметь в виду, что поскольку подгонка выражения для плотности ρ производилась всего лишь по одному эксперименту при фиксированной энергии T , к значениям параметров, приведенным в таблице (стр. 439), а также и к самому выводу о согласии теории с опытом, следует пока относиться с осторожностью. Для более надежных

нительным соображением о корректности проведенного анализа является то, что формфактор, определенный из опытов с рассеянием протонов на ядре He^4 , хорошо объясняет также опыты с рассеянием электронов на гелии (рис. 11).

Тот факт, что для описания рассеяния электронов и протонов в теории Глаубера используется практически один и тот же формфактор, представляет собой важную отличительную черту этой теории по сравнению с оптической моделью.

Вообще говоря, можно ожидать некоторых различий «электронного» и «протонного» формфакторов вследствие того, что плотности протонов и нейтронов в ядре несколько отличаются друг от друга; однако эти различия невелики, особенно если явно учесть распределение плотности внутри самого рассеивающегося протона; тогда размерами и структурой электрона можно пренебречь *).

V. РАССЕЯНИЕ НА ЯДРАХ УГЛЕРОДА И КИСЛОРОДА

В легких ядрах с атомными номерами $A > 4$, как это показывают опыты с рассеянием электронов, распределение плотности нуклонов также хорошо описывается выражением, соответствующим гармоническому потенциалу.

Если учесть, что в S -состоянии могут находиться только четыре нуклона, а остальные занимают состояния с большим значением l , то

$$\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = \prod_{k=1}^4 \rho_S(\mathbf{r}_k) \prod_{k=5}^A \rho_P(\mathbf{r}_k); \quad (37)$$

здесь первое произведение описывает S -оболочку и плотности $\rho_S(\mathbf{r}_k)$ следует выбирать в виде (26); второе произведение относится к остальным $A - 4$ нуклонам ($A < 16$) в P -состоянии с плотностями

$$\rho_P(\mathbf{r}_k) = (2/3\pi^{1/2}R^2) r_k^2 e^{-r_k^2/R^2}. \quad (38)$$

После подстановки этих выражений в формулу (20) и исключения δ -функции с помощью преобразования Гартенхауза — Шварца ядерная

*) Ядерный формфактор, проявляющийся в опытах с рассеянием протяженных протонов, равен

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3r = F_N(\mathbf{q}) F_P(\mathbf{q}), \quad (33)$$

где

$$\rho(\mathbf{r}) = \int \rho_N(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rho_P(\mathbf{r}') d^3r', \quad (34)$$

$$\rho_N(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) d^3(\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4) \quad (35)$$

(ядерная плотность $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$ симметрична по отношению к перестановкам \mathbf{r}_i). Для описания формфактора протона можно использовать полюсное выражение

$$F_P(\mathbf{q}) = [1 + (\mathbf{q}^2/a^2)]^{-2} \quad (36)$$

с параметром $a = 0,71 \text{ Гэв}/c$. К вопросу о рассеянии протяженных частиц мы вернемся еще ниже в связи с рассеянием ядер на ядрах (см. формулы (51) — (53)).

амплитуда рассеяния запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{q}) &= \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2/4A} \int e^{i\mathbf{q}\rho} d^3\rho \times \\ &\times \int \prod_{k=1}^4 \rho_S(\bar{\mathbf{r}}_k) \prod_{k=5}^A \rho_P(\mathbf{r}_k) \left\{ 1 - \prod_{j=1}^A \left[1 - \frac{\sigma_t(1-i\alpha)}{2\pi\beta} e^{-(\rho-s_j)^2/\beta^2} \right] \right\} \prod_{n=1}^A d^3r_n = \\ &= \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2/4A} \int e^{i\mathbf{q}\rho} d^3\rho \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\sigma_t(1-i\alpha)}{2\pi(R^2+\beta^2)} e^{-\rho^2/(R^2+\beta^2)} \right]^4 \times \right. \\ &\times \left. \left[1 - \frac{\sigma_t(1-i\alpha)}{2\pi} \left(\frac{1}{R^2+\beta^2} - \frac{2R^2}{3(R^2+\beta^2)^2} + \frac{2R^2\beta^2}{3(1+\beta^2)^3} \right) e^{-\rho^2/(R^2+\beta^2)} \right]^{A-4} \right\}; \quad (39) \end{aligned}$$

для простоты нуклонная амплитуда (23) в этом выражении предположена усредненной по pp - и pn -взаимодействиям.

Подынтегральное выражение в (39) может быть разложено в степенной ряд (по формуле для бинорма Ньютона), после чего все интегралы вычисляются аналитически¹⁹, однако получающееся при этом выражение оказывается довольно сложным.

Расчеты существенно упрощаются, если предположить, что ядро является сферически-симметричным; в этом случае (ср. формулы (10) и (14))

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \frac{i}{\lambda} \int_0^\infty J_0(q\rho) \{ \dots \} \rho d\rho, \quad (40)$$

где $q = 2 \sin(\theta/2)/\lambda$, а символом $\{ \dots \}$ обозначено выражение в фигурных скобках в формуле (39). Интегрирование в (40) может быть легко выполнено численными методами.

Можно получить более точное выражение для амплитуды $\mathcal{A}(\mathbf{q})$, если при определении плотности $\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)$ антисимметризовать координаты нуклонов в соответствии с принципом Паули. Например, в случае рассеяния на ядрах C^{12} и O^{16} конфигурация протонов и соответственно нейтронов имеет вид $(1S_{1/2})^2(1P_{3/2})^4$ для C^{12} и $(1S_{1/2})^2(1P_{3/2})^4(1P_{1/2})^2$ для O^{16} . Гармонические волновые функции нуклона в S - и P -состояниях имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi_S(\mathbf{r}; J=1/2, J_z=\pm 1/2) &= \varphi_S(\mathbf{r}) \chi_{\pm}, \\ \varphi_P(\mathbf{r}; J=1/2, J_z=1/2) &= \varphi_P(\mathbf{r}) (-Y_{10}\chi_+ + \sqrt{2}Y_{11}\chi_-)/\sqrt{3}, \\ \varphi_P(\mathbf{r}; J=1/2, J_z=-1/2) &= \varphi_P(\mathbf{r}) (-\sqrt{2}Y_{1-1}\chi_+ + Y_{10}\chi_-)/\sqrt{3}, \\ \varphi_P(\mathbf{r}; J=3/2, J_z=1/2) &= \varphi_P(\mathbf{r}) (\sqrt{2}Y_{10}\chi_+ + Y_{11}\chi_-)/\sqrt{3}, \\ \varphi_P(\mathbf{r}; J=3/2, J_z=-1/2) &= \varphi_P(\mathbf{r}) (-Y_{1-1}\chi_+ + \sqrt{2}Y_{10}\chi_-)/\sqrt{3}, \\ \varphi_P(\mathbf{r}; J=3/2, J_z=\pm 3/2) &= \varphi_P(\mathbf{r}) Y_{11}\chi_{\pm}; \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

здесь

$$\varphi_S(\mathbf{r}) = (1/\pi^{1/2}R)^{1/2} e^{-r^2/2R^2}, \quad \varphi_P(\mathbf{r}) = (2/3\pi^{1/2}R^2)^{1/2} r e^{-r^2/2R^2} \quad (42)$$

— соответствующие радиальные волновые функции, Y_{lm} — сферические функции, χ_{\pm} — спиновые функции нуклонов (со спином, направленным вверх или вниз; направление движения первичной частицы выбрано за ось z). Полные антисимметричные волновые функции, описывающие основное состояние ядра-мишени, выражаются через определитель Слэтера:

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = (A!)^{-1/2} \|\Phi_n(\mathbf{r}_k)\|, \quad (43)$$

где $\Phi_n(\mathbf{r}_k)$ — одночастичные волновые функции (41).

Если не учитывать процесс перезарядки, влияние которого в области высоких энергий невелико, то протоны и нейтроны можно симметризовать отдельно:

$$\varphi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = \varphi^{(p)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z) \varphi^{(n)}(\mathbf{r}_{Z+1}, \dots, \mathbf{r}_A), \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(p)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z) &= (Z!)^{-1/2} \prod_{h=1, \dots, Z} \varphi_n(\mathbf{r}_h), \\ \varphi^{(n)}(\mathbf{r}_{Z+1}, \dots, \mathbf{r}_A) &= [(A-Z)!]^{-1/2} \prod_{h=Z+1, \dots, A} \varphi_n(\mathbf{r}_h). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Это упрощает вычисления.

На рис. 12 приведены результаты расчетов для случая рассеяния протонов на кислороде ($R \approx 1,71 \cdot 10^{-13}$ см, с учетом формфактора протона). Как видно, теория и эксперимент хорошо согласуются; при этом антисимметризация волновых функций оказывается сравнительно неважной. Вычисления выполнены для $|\alpha| = 0,3$ (знак α несуществен); изменение более чем на 0,1 заметно ухудшает согласие расчетов с опытом.

Заметно хуже эксперимент и теория согласуются в случае рассеяния на углеороде (рис. 13). Если для ядерного радиуса использовать значение $R = 1,58 \cdot 10^{-13}$ см, полученное из опытов с рассеянием электронов, то минимум в сечении приходится на слишком малые значения передаваемого импульса, а расчетная величина сечения в области второго максимума оказывается завышенной примерно на 50% по сравнению с экспериментом. Попытка уменьшить радиус R с тем, чтобы добиться совпадения положений экспериментального и теоретического минимумов, приводит к ухудшению согласия как в области малых, так и в области больших значений t . По-видимому, расхождения обусловлены тем, что ядро C^{12} сильно деформировано, поэтому использованные при расчетах выражения для плотности $\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)$ являются слишком грубыми.

В случае рассеяния электронов основной вклад дает импульсное приближение, когда сечение рассеяния выражается через плотности отдельных ядерных нуклонов. Эти плотности сферически-симметричны, поэтому результаты расчетов слабо зависят от степени деформации ядра. При рассеянии нуклонов существенный вклад дает двукратное рассеяние, например рассеяние с переходом ядра в первое возбужденное состояние и последующее рассеяние в основное состояние. Отклонения от сферичности в этом случае становятся весьма существенными и должны сильнее проявляться в области второго дифракционного максимума, где, как мы увидим ниже, основную роль играет двукратное рассеяние.

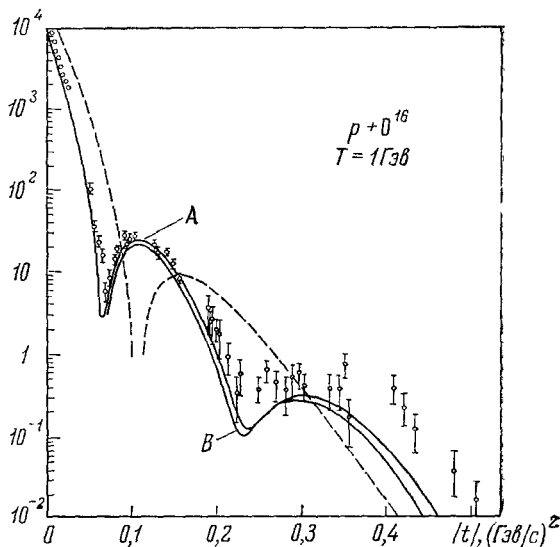


Рис. 12. Сечение упругого рассеяния протонов на ядре кислорода (*барн/стерад*)^{9, 10}.

Кривая A — расчет по теории Глаубера с антисимметричной волновой функцией (43); B — соответствующая кривая для случая, когда плотность ρ выбирается в виде (37). Штриховая кривая — сечение, вычисленное в импульсном приближении. t — квадрат четырехмерного передаваемого импульса.

Расчеты, выполненные Дроздовым на основе приближенной модели черного эллипсоида ²², показали, что увеличение деформации действительно сдвигает теоретическую кривую в нужную сторону.

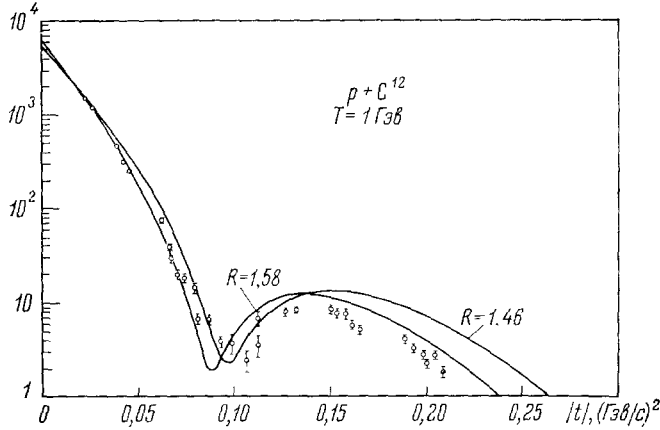


Рис. 13. Сечение упругого рассеяния протонов на ядре углерода (мбарн/стер) ⁹, ¹⁰.

Кривые — расчет по теории Глаубера для двух значений ядерного радиуса R (с учетом антисимметризации нуклонов (43)).

Исследование упругого рассеяния в области второго дифракционного максимума может служить важным источником сведений о степени деформации ядер (подробнее об этом см. ¹⁹).

VI. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ТЯЖЕЛЫМИ ЯДРАМИ

Для рассеяния на тяжелых ядрах амплитуду (39) удобно представить в несколько ином виде. Для простоты мы будем снова предполагать, что плотность ρ ($\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A$) имеет вид (25), т. е. факторизуется, и, кроме того, выражается через гауссовы экспоненты. Тогда, с помощью преобразования Гартенхауза — Шварца, соотношение (20) переписется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{q}) &= \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2/4A} \int e^{i\mathbf{q}\rho} d^2\rho \left\{ 1 - \prod_{h=1}^A \left[1 - \frac{\lambda}{2\pi i} \int e^{-i\mathbf{q}_h \rho} \mathcal{A}_h(\mathbf{q}_h) F(\mathbf{q}_h) d^2q_h \right] \right\} = \\ &= \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2/4A} \int e^{i\mathbf{q}\rho} d^2\rho \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\lambda}{2\pi i} \int e^{-i\delta\rho} \mathcal{A}(\delta) F(\delta) d^2\delta \right]^A \right\}, \quad (46) \end{aligned}$$

где формфактор

$$F(\delta) = \int e^{i\mathbf{r}_h \delta} \rho(\mathbf{r}_h) d^3\mathbf{r}_h,$$

а функции плотности $\rho(\mathbf{r}_h)$ удовлетворяют условию нормировки

$$\int \rho(\mathbf{r}_h) d^3\mathbf{r}_h = 1.$$

Заметим, далее, что в ядрах с большим значением A функция плотности с ростом A изменяется приблизительно как $1/A$ — это хорошо известно из опытов с рассеянием электронов. Поэтому, определив функцию

$$\eta(\rho) = \frac{\lambda A}{2\pi} \int e^{-i\delta\rho} \mathcal{A}(\delta) F(\delta) d^2\delta, \quad (47)$$

выражение в квадратных скобках в (46)

$$\left[1 + \frac{i\eta}{A}\right]^A = \sum_{k=0}^A \left(\frac{A-k+1}{A} \frac{A-k+2}{A} \dots \frac{A-1}{A}\right) \frac{(i\eta)^k}{k!} \quad (48)$$

можно приближенно заменить бесконечным рядом — разложением экспоненты

$$e^{i\eta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^k}{k!}. \quad (49)$$

Выражение для ядерной амплитуды рассеяния при этом принимает удобный для вычислений вид

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \frac{i}{2\pi\hbar} e^{q^2 R^2/4A} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} [1 - e^{i\eta(\boldsymbol{\rho})}] d^2\rho. \quad (50)$$

VII. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГЛАУБЕРА К ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ ДВУХ ЯДЕР

Теорию Глаубера можно обобщить и на случай взаимодействий двух ядер. Исходные соотношения теории (16) и (17) будут иметь в этом случае вид

$$\delta\mathcal{A}_{\text{пад}} = \frac{i}{2\pi\hbar} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} \Phi_{\text{К}}^{(A)*}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \Phi_{\text{К}}^{(B)*}(\mathbf{r}_{A+1}, \dots, \mathbf{r}_{A+B}) \times \\ \times \Gamma(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{A+B}) \Phi_{\text{Н}}^{(A)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \Phi_{\text{Н}}^{(B)}(\mathbf{r}_{A+1}, \dots, \mathbf{r}_{A+B}) \prod_{i=1}^{A+B} d^3r_i d^2\rho, \quad (51)$$

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{A+B}) = 1 - \prod_{i=1}^A \prod_{j=1}^B \{1 - \Gamma_{ij}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{s}_i^{(A)} - \mathbf{s}_j^{(B)})\}, \quad (52)$$

где функция Γ_{ij} с помощью соотношения (12) выражается через амплитуду NN -рассеяния $\mathcal{A}_N(q)$.

Очевидным образом обобщаются и все последующие соотношения. В частности, если для ядерных плотностей $\rho^{(A)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)$ и $\rho^{(B)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_B)$ использовать факторизующиеся выражения, зависящие от гауссовых экспонент, ядерная амплитуда освобождается от δ -функций и перед интегралом появляется фактор

$$e^{q^2 R_A^2/4A} e^{q^2 R_B^2/4B}, \quad (53)$$

где A и B — массовые числа сталкивающихся ядер.

Применение теории Глаубера к простейшему случаю взаимодействия двух ядер (к взаимодействию дейтрон + ядро) рассматривалось в работах ²³⁻²⁵.

Если теперь снова перейти к случаю рассеяния N + ядро, то одна из экспонент в (53) исчезает, а в выражении для ядерной амплитуды автоматически появляется формфактор нуклона.

VIII. ПЕРЕХОД К ОПТИЧЕСКОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

В заключение полезно более подробно рассмотреть, каким образом в теории Глаубера возникает обычная оптическая дифракционная картина.

На рис. 14, на примере ядра He^4 , показан вклад в амплитуду рассеяния от членов, обусловленных одним, двумя, тремя и т. д. внутриядер-

ными столкновениями. В полулогарифмическом масштабе кривые, соответствующие гауссовым экспонентам, приобретают вид наклонных прямых. Суммируя эти кривые, мы видим, что первый, основной, пик в угловом распределении рассеянных частиц практически целиком обусловлен однократными взаимодействиями внутри ядра. Взаимное гашение амплитуд, происходящих от одно- и двукратных столкновений, приводит к минимуму в сечении вблизи $q^2 = 0,2$ ($\text{Гэв}/c$)². Для несколько бóльших

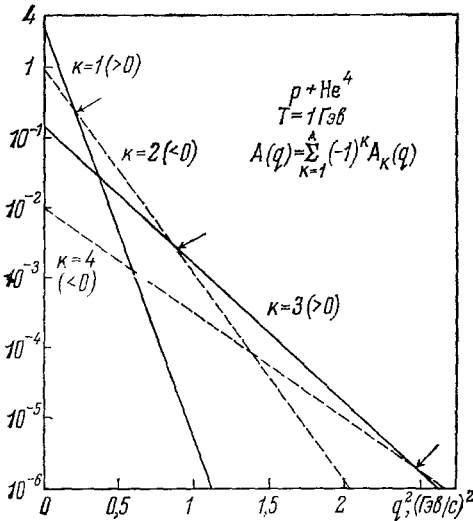


Рис. 14. Вклад в амплитуду упругого рассеяния протонов на гелии при $T=1$ Гэв членов, обусловленных k внутриядерными столкновениями (в отн. ед.)¹⁴.

Расчеты выполнены по формуле (28), где для простоты положено $a=0$. Стрелки отмечают точки, в которых ядерная амплитуда имеет минимумы вследствие того, что два члена, дающие наибольший вклад, компенсируют друг друга.

значений q , в области второго дифракционного максимума, угловое распределение почти целиком определяется процессами двукратного рассеяния. Взаимная компенсация амплитуд A_2 и A_3 дает минимум вблизи $q^2 = 0,8$ ($\text{Гэв}/c$)² и т. д.

Таким образом, дифракционная картина в теории Глаубера возникает в результате интерференции амплитуд, обусловленных различным числом внутриядерных столкновений. Это хорошо видно также из рис. 15.

При переходе к тяжелым ядрам мы получим обычное оптическое выражение для ядерной амплитуды, если в формуле (50) отбросим фактор $e^{q^2 R^2/4A}$ (напомним, что A достаточно велико), а амплитуду $\mathcal{A}(\delta)$ будем рассматривать не зависящей от δ . (Последнее вполне оправдано, так как в тяжелых ядрах, радиус которых существенно превосходит радиус NN -взаимодействий, формфактор $F(\delta)$ имеет намного больший пик при $\delta \approx 0$, чем амплитуда $\mathcal{A}(\delta)$, значение которой при $\delta = 0$ можно вынести за знак интеграла в формуле (47).)

Так как формула (50) получена в предположении, что конечный ряд (48) можно заменить бесконечным разложением (49), отклонение

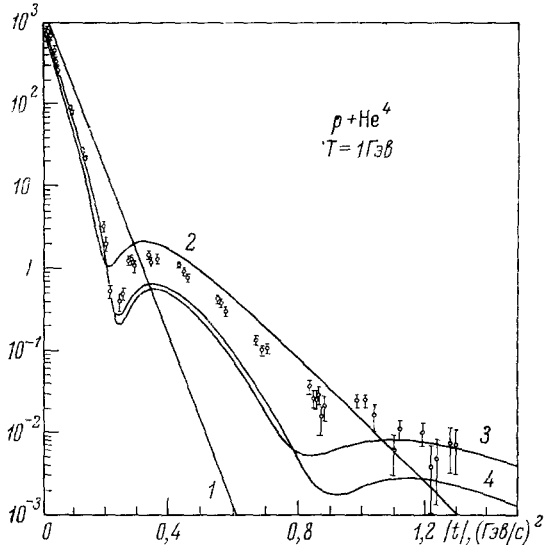


Рис. 15. Цифрами 1—4 отмечены сечения рассеяния, вычисленные с учетом соответственно одного, двух, трех и четырех членов в амплитуде рассеяния.

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^n (-1)^k \mathcal{A}_k \quad (n=1, 2, 3, 4).$$

Расчеты выполнены с учетом реальной части амплитуды NN -рассеяния a ¹⁴.

величины отношения соответствующих коэффициентов в (48) и (49)

$$\Delta(A, k) = \frac{A-k+1}{A} \frac{A-k+2}{A} \dots \frac{A-1}{A}$$

от единицы является характеристикой того, насколько различаются теория многократного дифракционного рассеяния Глаубера и оптическая теория.

Из рис. 16 видно, что отношение $\Delta(A, k)$ при $k = 1, 2$ для всех ядер близко к единице. Это объясняет, почему первый дифракционный мак-

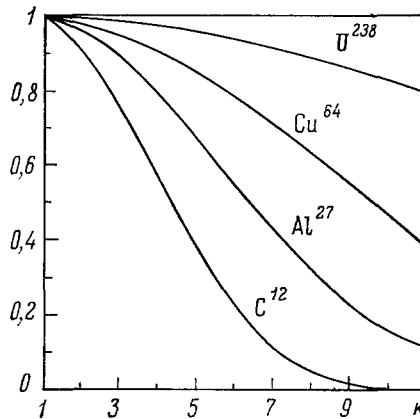


Рис. 16. Относительная величина коэффициентов в разложениях (48) и (49) в зависимости от массового числа ядра-мишени и номера члена разложения k .

симум при небольших углах рассеяния во всех случаях хорошо аппроксимируется оптической теорией. При больших значениях k отношение $\Delta(A, k)$ близко к единице лишь для тяжелых ядер; только в этом случае оптическое приближение оказывается достаточно хорошим.

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Элтон, Размеры ядер, М., ИЛ, 1962.
2. П. Е. Ходгсон, Оптическая модель упругого рассеяния, М., Атомиздат, 1968.
3. Р. Е. Ходгсон, Ann. Rev. Nucl. Sci. **17**, 1 (1967).
4. Н. Камитсубо, Н. Охnuma, К. Ано, А. Учhida, М. Shinohara, М. Imaizumi, С. Кобаяyashi, М. Sekiguchi, Phys. Lett. **9**, 332 (1964).
5. К. Yagi, Н. Ejiri, М. Furukawa, Y. Ishizaki, М. Koike, К. Matsuda, Y. Nakajima, I. Ninaka, Y. Saji, E. Tanaka, G. R. Satchler, Phys. Lett. **10**, 186 (1964).
6. G. Gerstein, J. Niederer, K. Strauch, Phys. Rev. **108**, 427 (1957).
7. И. К. Аверьянов, З. З. Пурцеладзе, ЯФ **5**, 293 (1967).
8. Т. А. Fujii, Phys. Rev. **113**, 695 (1959).
9. Н. Palevsky, J. L. Friedes, R. J. Sutter, G. W. Bennett, G. J. Igo, W. D. Simpson, G. C. Phillips, D. M. Corley, N. S. Wall, R. L. Stearns, B. Gottschalk, Phys. Rev. Lett. **18**, 1200 (1967); **19**, 387 (1967).
10. Н. М. Macdonald, Proc. London Math. Soc. **23**, ser. 2, 220 (1914).
11. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, т. 1, М., ИЛ, 1948, стр. 171.
12. R. J. Glauber, в сб. «Lectures in Theoretical Physics», v. 1, Intern. Publ. Inc., 1959, стр. 315.
13. V. Franco, R. J. Glauber, Phys. Rev. **142**, 1195 (1966).

14. R. J. Glauber, Multiple Diffraction Theory of High Energy Collisions, CERN Report TH. 786 (1967).
15. V. S. Barashenkov, Fortschr. Phys. **14**, 741 (1966).
16. В. С. Барашенков, Сечения взаимодействия элементарных частиц, М., «Наука», 1966.
17. S. Gartenhaus, C. Schwartz, Phys. Rev. **108**, 482 (1957).
18. W. Czyż, L. Lesniak, Phys. Rev. Lett. **24B**, 227 (1967).
19. R. H. Bassel, C. Wilkin, High Energy Proton Scattering and the Structure of Light Nuclei, Brookhaven National Laboratory Report BNL 12430 (1967); Phys. Rev. **174**, 1179 (1968).
20. V. Franco, E. Coleman, Phys. Rev. Lett. **17**, 827 (1966).
21. J. L. Friedes, Proton—Nuclei Reactions at 1 GeV Incident Energy, Brookhaven National Laboratory Report BNL 11890 (1967).
22. С. И. Дроздов, ЖЭТФ **28**, 732 (1955).
23. L. Zamick, Ann. of Phys. **21**, 550 (1963).
24. M. L. Rustgi, Nucl. Phys. **59**, 460 (1964).
25. M. L. Rustgi, Phys. Lett. **24B**, 229 (1967).
26. R. F. Frosch, J. S. McCarthy, R. E. Rand, M. R. Yearian, Phys. Rev. **160**, 874 (1967).
27. G. Alberi, L. Bertocchi, Glauber Theory and $\pi - N$ Scattering in the GeV Region, Intern. Centre for Theor. Phys. in Trieste, Report IC/68/98 (1968).
28. F. Bradamante, S. Conetti, G. Fidencaro, M. Fidencaro, M. Giorgi, A. Penzo, L. Piemontese, F. Sauli, P. Schiavon, $\pi - d$ Coherent Scattering at 895 MeV/c.
29. E. S. Abers, H. Burkhardt, V. L. Teplitz, C. Wilkin, Nuovo Cimento **42**, 365 (1966).
30. L. Bertocchi, A. Capella, Nuovo Cimento **51A**, 33 (1967).
31. R. C. Chase, E. Coleman, T. G. Rhoades, M. Fellingner, E. Gutman, R. C. Lamb, L. S. Schroeder, Proc. of the 14th Intern. Conf. on High Energy Phys., Vienna, 1968.
32. G. Fäldt, T. E. O. Ericson, Nucl. Phys. **B8**, 1 (1968).
33. N. M. Queen, Proc. Phys. Soc. **87**, 889 (1966).
34. J. Pumlin, Phys. Rev. **173**, 1651 (1968).
35. E. A. Remler, Phys. Rev. **176**, 2108 (1968).
36. И. Ж. Петков, Препринт ОИЯИ Р4-4415, Дубна, 1969.
37. C. Michael, C. Wilkin, Diffraction Minima in Hadron — Deuteron Cross Sections, Rutherford Laboratory Preprint RPP/A 54, Chilton, 1968.
38. H. C. Hsiung, E. Coleman, B. Roe, D. Sinclair, J. Van der Velde, Phys. Rev. Lett. **21**, 187 (1968).
39. E. Kujański, D. Sachs, J. S. Trefil, Phys. Rev. Lett. **21**, 583 (1968).
40. V. Franco, Phys. Rev. Lett. **21**, 1360 (1968).
41. I. J. McGree, Phys. Rev. **151**, 772 (1966).